Sujet de thèse.
Simulation et estimation des paramètres d'un mouvement brownien « collant »

Antoine Lejay et Denis Villemonais

Février 2018

Ce sujet porte sur la théorie des diffusions uni-dimensionnelles générales, telle qu'exposée dans l'ouvrage d'Itô et McKean [3], et plus particulièrement sur le mouvement brownien « collant » (*sticky Brownian motion* en anglais). La simulation et l'estimation des paramètres des équations différentielles stochastiques à coefficients réguliers ont reçu une très grande attention ces dernières décennies. En revanche, le cas des diffusions générales n'a été que très peu abordé jusqu'aux très récents travaux de Lejay et Pigato [4], qui traitent de l'estimation des paramètres d'équations différentielles stochastiques à coefficients discontinus. Le présent projet de thèse a pour objectif principal de développer des méthodes de simulation et d'estimation pour des diffusions avec une mesure de vitesse contenant un ou plusieurs atomes, dont le prototype est le mouvement brownien « collant ».

Plus précisément, considérons les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = \mathbf{1}_{X_t \neq 0} dW_t,\ X_0 = 0$$

où W est un mouvement brownien (voir le récent article de Bass [1]). Les solutions sont des mouvements browniens à l'extérieur de 0 et passent un temps plus ou moins long en 0, en fonction d'un paramètre $\gamma \in [0, +\infty]$. Par exemple, le mouvement Brownien W est lui même solution (γ=0), ainsi que la trajectoire identiquement nulle ($\gamma = +\infty$). Pour $\gamma \in (0, +\infty)$, les solutions de l'équation cidessus sont solutions du système

$$\begin{cases} dX_t = \mathbf{1}_{X_t \neq 0} dW_t,\ X_0 = 0 \\ \mathbf{1}_{X_t = 0} dt = \gamma d\ell_t^0(X), \end{cases}$$

où $\ell_t^0(X)$ est le temps local de X en 0 (voir l'article d'Engelbert et Peskir [2]). Il est connu qu'il n'y a pas d'unicité forte des solutions à cette équation.

Le comportement typique d'une solution, lorsque $\gamma \in (0,1)$, est celui d'un mouvement brownien qui ralentit lorsqu'il atteint 0, la trajectoire semblant coller à la droite des abscisses (d'où le nom anglais de *sticky Brownian motion*). Une application possible de ces processus est de simuler l'existence de lignes de support pour des cours d'action. Par exemple, si il est connu qu'une action cotée est soumise à une offre de rachat à 10$, on peut s'attendre à ce que le cours n'évolue que légèrement autour de ce prix.

L'objectif de ce projet est de déterminer des procédures de simulation des solutions de cette équation lorsque γ est fixé, ainsi que des procédures d'estimation du paramètre γ en fonction des données. La première partie présente des difficultés inhérentes à la non-unicité forte et plusieurs approches sont envisageables (approximation par des EDS à coefficients non-dégénérés ou limite de marches aléatoires changées de temps par exemple). Pour la seconde partie, le doctorant devra s'appliquer à mettre au point puis démontrer la convergence d'estimateurs spécifiques lorsque la position du point de support est connue (par exemple 0 comme dans les équations ci-dessus). Un estimateur permettant la détection de la position du point de support devra également être étudié. Enfin, les résultats obtenus pourront être généralisés aux équations différentielles stochastiques avec plusieurs points de supports, en commençant par l'extension des résultats de [1] et de [2] à cette situation.

La thèse se déroulera au sein de l'équipe *Probabilités et statistiques* de l'IECL et de l'équipe-projet Inria TOSCA. Le sujet rentre dans le domaine des mathématiques appliquées et demande au candidat des connaissances approfondies en probabilités et, plus particulièrement, en calcul stochastique (niveau M2 en mathématiques appliquées).

Références

[1] R.F. Bass. A stochastic differential equation with a sticky point. *Electron. J. Probab.*, 19, no. 32, 1–22 (2014).

[2] H-J. Engelbert and G. Peskir. Stochastic differential equations for sticky Brownian motion. *Stochastics*, 86 :6, 993-1021 (2017).

[3] K. Itô and H. McKean. *Diffusion processes and their sample paths.* Springer-Verlag, Berlin-New York, (1974).

[4] A. Lejay and P. Pigato Statistical estimation of the Oscillating Brownian Motion. *ArXiv e-prints*, 1701.02129 (2017).