

Implémentation et estimation d'un modèle de diffusion à sauts, application en neuroscience.

Encadrantes : Charlotte Dion⁽¹⁾ et Sarah Lemler⁽²⁾

⁽¹⁾ Sorbonne Université, LPSM, 75005 Paris, ⁽²⁾ MICS, CentraleSupélec, Université Paris-Saclay
charlotte.dion@upmc.fr, sarah.lemler.pro@gmail.com

Pré-requis : Estimation, processus stochastiques, bonne connaissance du logiciel R ou Python

Mots clés : Processus de diffusion, processus de Hawkes, estimation non-paramétrique, sélection de modèles, neuroscience.

Contexte : Les neurones communiquent à travers l'émission de signaux électriques. De manière très schématique, lorsqu'un signal électrique arrive au niveau de la membrane d'un neurone, il est transmis au noyau aussi appelé soma. Si ce signal excède un certain seuil (autour des -50 mV), appelé seuil d'excitabilité, il se propage par l'intermédiaire de l'axone du neurone aux synapses et est transmis à d'autres neurones. On appelle *spike* d'un neurone, l'instant auquel le signal électrique dépasse le seuil d'excitabilité et est transmis aux autres neurones et *spike train* la suite de *spikes* d'un neurone. Les neurobiologistes sont capables de mesurer deux types de signaux : un signal intra-cellulaire et des signaux extra-cellulaires. Le signal intra-cellulaire est mesuré en introduisant une électrode à l'intérieur d'un neurone qui mesure le potentiel de membrane du neurone, on obtient donc un signal continu. Une méthode moins invasive consiste à mesurer les *spike trains* de plusieurs neurones en même temps à l'aide d'une multi-électrode, on obtient alors un signal discret.

Selon les données considérées, deux types de modélisation ont été proposées. D'une part, les processus de diffusion sont souvent considérés pour modéliser la dynamique du potentiel de membrane d'un neurone en temps continu entre deux *spikes* (voir [3]). D'autre part, les processus à sauts sont utilisés pour modéliser les trains de *spikes*. Enfin, les processus de diffusion à sauts peuvent modéliser la dynamique du potentiel de membrane en tenant compte des *spikes* du neurone. Les auteurs de [4] ont ainsi proposé d'ajouter un processus de Poisson au processus de diffusion pour décrire la dynamique globale du potentiel de membrane d'un neurone.

Lorsque l'on dispose des *spike trains* de plusieurs neurones, un challenge est de reconstruire le graphe de connectivité des neurones. Pour cela on peut utiliser des processus de comptage. En particulier, les processus de Hawkes multi-dimensionnels sont très adaptés pour modéliser le comportement des temps de *spike* d'un réseau de neurones (voir par exemple [5]). En effet, ce sont des processus auto-excitants (la probabilité qu'un nouveau signal arrive dépend de toute le passé) et qui peuvent modéliser le caractère excitant ou inhibiteur d'un neurone du réseau.

Nous disposons des ces deux types de données réelles mesurées sur des tortues : le potentiel de membrane à temps continus d'un neurone fixé et les *spike trains* d'une dizaine de neurones autour du neurone fixé. Nous proposons de les étudier à l'aide d'un modèle particulier de processus de diffusion à sauts. Ce modèle est composé d'un processus de diffusion qui modélise le potentiel de membrane du neurone fixé entre les *spikes* des neurones avoisinants et d'une partie saut issue d'un processus de Hawkes multidimensionnel (modélisant l'influence des autres neurones sur le potentiel de membrane du neurone

étudié). Une procédure d'estimation du coefficient de dérive a été proposée en supposant les autres paramètres du modèle connus et des résultats théoriques ont été établis pour l'estimateur obtenu (voir [1]). Une perspective proposée en discussion de [1] est d'estimer l'intensité du processus de Hawkes via la méthode proposée dans [2], d'injecter cet estimateur dans le modèle, puis d'estimer le coefficient de dérive par la méthode de [1].

Objectifs du stage :

1. Se familiariser avec le processus (diffusions, Hawkes).
2. Étudier l'estimateurs de l'intensité d'un processus de Hawkes proposé par [2] et l'estimateur du drift dans le modèle proposé par [1].
3. Les implémenter (R ou Python).
4. Comprendre l'enjeu en neuroscience et proposer une procédure complète sur les données réelles ainsi que des illustrations des résultats (on s'inspirera de l'article [5]).
5. Comprendre et évaluer l'erreur induite par le *plug-in* de l'estimateur de l'intensité du processus de Hawkes de [2] dans la seconde procédure [1] pour l'estimation du drift dans le modèle de diffusion à sauts.

Selon l'intérêt du stagiaire, l'accent pourra être mis plutôt sur le point 4 (implémentation) ou le point 5 (statistique mathématique).

Références

- [1] Charlotte Dion and Sarah Lemler. Nonparametric drift estimation for diffusions with jumps driven by a Hawkes process. working paper or preprint, October 2019.
- [2] N. Hansen, P. Reynaud-Bouret, and V. Rivoirard. Lasso and probabilistic inequalities for multivariate point processes. *Bernoulli*, 21(1) :83–143, 02 2015.
- [3] R Höpfner. On a set of data for the membrane potential in a neuron. *Mathematical Biosciences*, 207(2) :275 – 301, 2007.
- [4] P. Jahn, R. Berg, J. Hounsgaard, and S Ditlevsen. Motoneuron membrane potentials follow a time inhomogeneous jump diffusion process. *J. Comput. Neurosci.*, 31(3) :563–579, 2011.
- [5] Régis C. Lambert, Christine Tuleau-Malot, Thomas Bessaih, Vincent Rivoirard, Yann Bouret, Nathalie Leresche, and Patricia Reynaud-Bouret. Reconstructing the functional connectivity of multiple spike trains using hawkes models. *Journal of Neuroscience Methods*, 297 :9 – 21, 2018.